Teorem: $a, b \in \mathbb{R}[x]$ ve $b \neq 0$ verildiğinde

$$a = b.q + r \quad , \qquad der(r) < der(b)$$

veya $r = 0$

sağlayacak şekilde tek türlü belirli q ve r polinomları vardır.

İspat: 1) $der\, b > der\, a$ için:

$$a = b.\underbrace{0}_{q} + \underbrace{a}_{r}$$

$der(r) = der(a) < der(b)$ sağlanır.

2) $der\, a \geqslant der\, b$ için:

$a = \cancel{a_n x^n} + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$

$b = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots \quad (b_m \neq 0)$

der(a) için tümevarım:

$der(a) \leq n-1$ için teoremi doğru kabul edelim,

$der(a) = n$ iken;

$$\left(a - \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot b\right) \Rightarrow \text{derecesi} \leq (n-1)$$

$$a_n x^n - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot \left(b_m \cdot x^m + \dots\right)$$

$+ \dots$

$\text{der}\ a - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot b \leq n-1$ olduğundan

tümevarım hipotezi gereği

$$a - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot b = b \cdot q_1 + r_1 ,$$

$\text{der}\ r_1 < \text{der}\ b$ veya $r_1 = 0$

$$a = b \cdot \overbrace{\left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + q_1 \right)}^{q} + r_1$$

Teorem: ($\mathbb{R}[x]$'te ebob)

$a, b \in \mathbb{R}[x]$ verildiğinde (en az biri 0 değil)

$$d(x) = a(x) \cdot p(x) + b(x) \cdot q(x)$$

şeklinde yazılabilen en küçük dereceli monik d polinomu a ve b nin ebobudur.

İspat: $D = \{ \underline{a} \cdot p + \underline{b} q : p, q \in \mathbb{R}[x] \}$ olsun.

d, D kümesindeki minimum dereceli monik polinom olsun.

1) d, D'deki tüm polinomları böler.

$p.a + q.b \in D$ alalım.

$\underline{d = a.p_0 + b.q_0}$ varsayalım.

$pa + qb$ yi d ile bölersek; $\underline{\text{der } r < \text{der } d}$ veya $r = 0$ olacak şekilde

$$pa + qb = c \cdot d + r$$

c ve r vardır.

$$a\underbrace{(p - c \cdot p_0)}_{P} + b\underbrace{(q - c \cdot q_0)}_{Q} = r \in D$$

der $r <$ der d olamaz, r nin derecesi min.

$r = 0$

$r=0 \Rightarrow d \mid a.p + b.q$

d, D deki tüm polinomları böler.

2) $a \in D$ ve $b \in D$

$a = 1.a + 0.b \in D$

$b = 1.b + 0.a \in D$

$\Rightarrow d \mid a$ ve $d \mid b$.

3) $e \mid a$ ve $e \mid b$ olsun. $(e \overset{?}{\mid} d)$

$d = a.p_0 + b.q_0$

$d = e.\underbrace{(s_1 p_0 + s_2 q_0)}_{t}$

$\left(\begin{array}{l} e \mid a \Leftrightarrow a = e.s_1 \\ e \mid b \Leftrightarrow b = e.s_2 \end{array} \right)$

$\Rightarrow e \mid d$

Örnek: x^2 ve x^2-1 in ebobu?

$a \cdot x^2 + b \cdot (x^2-1)$ yazılabilecek en küçük der polinom?

$\underline{1} \cdot x^2 + (-1)(x^2-1) = \underline{1}$

ebob $= \underline{1}$ dir.

Lemma 1: A ve B, $\mathbb{R}[x]$ üzerinde denk $n \times n$ matrisler ise her $k \leq n$ için

$\Delta_k = A$ nın $k \times k$ minörlerinin ebobu

$\Delta'_k = B$ nin " " "

ise $\Delta_k = \Delta'_k$

Lemma 2: A, $\mathbb{R}[x]$ üzerinde $n \times n$ sıfırdan farklı bir matris ise; $\tilde{A} \in \mathbb{R}[x]^{n-1 \times n-1}$ ve $0 \neq d$, $\tilde{A}$ nın tüm terimlerini bölen bir polinom olmak üzere

A, aşağıdaki matrise denktir

$$A \sim \left[\begin{array}{c|ccc} d_1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

İspat: $A \in \mathbb{R}[x]^{n\times n}$ verilmiş olsun. A nın denk olduğu tüm matrislerde, 0 dan farklı tüm terimlerin ebobu d_1 olsun.

İddia: d_1, Lemma (2) nin şartını sağlar.

d_1 i içeren bir B matrisi alalım.

$A \sim B$, d_1 B nin (i,j). terimi olsun.

B'de satır ve sütun yer değişikliğiyle

$$B \sim \left[\begin{array}{c|ccc} d_1 & b_{1j} & \cdots & \cdots \\ \hline \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{array}\right]$$

haline getiririz.

d_1 bulunduğu 1. satır ve 1. sütundaki tüm terimleri böler. Çünkü d_1, B nin terimlerinin de bir ortak bölenidir.

$$B \sim \left[\begin{array}{c|c} d_1 & * \\ \hline * & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|cccc} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & & \tilde{A} & \\ 0 & & & & \end{array}\right]$$

olur. $\hat{A}$ nın bir elemanı a_{ij} olsun.

$$a_{ij} = d_1 \cdot q + r \quad , \quad \operatorname{der} r < \operatorname{der} d_1 \text{ veya } r = 0$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & (d_1 \cdot q + r) \to i & \\ 0 & & & \end{array}\right] \underset{-q d_1 \cdot S_1 + S_i}{\sim} \left[\begin{array}{c|ccc} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & \\ -q d_1 & & d_1 q + r & \\ & & & \end{array}\right]$$

j. sütun

$$\sim \begin{bmatrix} d_1 & & d_1 \\ d_1 q & & \overbrace{d_1 q + \boxed{r} - d_1 q} \end{bmatrix}$$

$\operatorname{der} r < \operatorname{der} d_1$ bu durum d_1 in derecesinin minimal oluşu ile çelişir.

$r = 0$ olur.

d_1, $\tilde{A}$ nın tüm terimlerini böler

$$A \sim \left[\begin{array}{c|ccc} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

$\tilde{A}$ nın tüm terimleri d_1 e bölünür.

Teorem 1: $A \in \mathbb{R}[x]^{n\times n}$ olsun.

i) A, köşegensel terimleri monik, her i için $d_i \mid d_{i+1}$ şartını sağlayan bir

$$D = \text{köşeg}[d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0]$$

matrisine benzerdir.

ii) Eğer A, her i için $d_i \mid d_{i+1}$ sağlayan ve monik d_i ler için $\text{köşeg}[d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0]$ matrisine benzer ise $\Delta_k = A$ nın $k \times k$ minörlerinin obebi olmak üzere $d_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ dir.

İspat: 1) $A = O_n$ ise; $A = \text{köşeg}[0, \ldots, 0]$

2) $A \neq O_n$ için.

n üzerinde tümevarım uygularsak;

$n = 1$ için $A = [a_{11}]$, $a_{11} \neq 0$

$A \sim [\underbrace{1}_{d_1}]$

$A = \text{köşeg}[d_1, \ldots, d_n]$

$(n-1)$ için Teoremi doğru kabul edelim.

Lemma 2 ye göre A matrisi

$$A' = \left[\begin{array}{c|ccc} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

matrisine denktir; d_1, $\tilde{A}$ nın tüm terimlerini böler. $\tilde{A}$ $(n-1)\times(n-1)$ olduğundan, tümevarım hipoteziyle, $i \geq 2$ için $d_i \mid d_{i+1}$ sağlayan

$d_2, \ldots, d_r$ vardır ki $\tilde{A} \sim$ köşeg$[d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots]$

$$A \sim \left[\begin{array}{c|cccccc} d_1 & 0 & \cdot & & & & \\ \hline 0 & d_2 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \cdot & & & d_r & & & \\ \cdot & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{array}\right]$$

$A \sim \left[\begin{array}{c|c} d_1 & \\ \hline & \tilde{A} \end{array}\right] \overset{?}{\sim}$ $\left[\begin{array}{c|ccc} d_1 & & & \\ \hline & d_2 & & \\ & & \ddots & \end{array}\right]$

?

$d_1 \mid d_2$

$d_2 \mid d_3$, $d_3 \mid d_4, \ldots$

$\tilde{A}$ nın tüm terimleri d_1 e bölünür ve $d_2, d_3, \ldots, d_r$ $\tilde{A}$ nın terimlerinin toplamların dan geldiğinden; d_1 $i \geq 2$ için d_i leri böler.

d_i nin baskatsayısı a_i ise $\frac{1}{a_i} \cdot d_i = \tilde{d_i}$

terimleri monik hale getirilebilir.

$$\begin{array}{c} \frac{1}{a_1} \rightarrow \\ \frac{1}{a_2} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

ii) $A \sim \underbrace{\text{köşeg}[d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0]}_{B}$

Lemma 1 'den A nın ve B nin

$k \times k$ minörlerinin ebobları eşittir.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ & d_2 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_r & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$ nin $k \times k$ minörleri

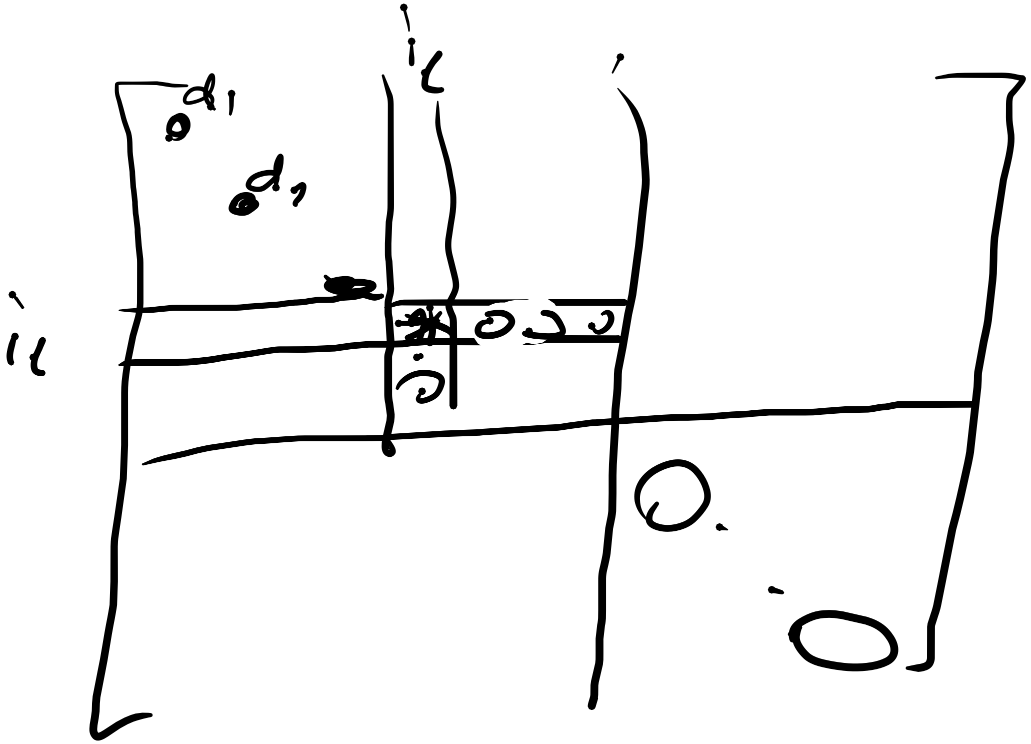
$$M = \begin{bmatrix} D_{i_1 j_1} & D_{i_1 j_2} & \cdots & D_{i_1 j_k} \\ \vdots & & & \\ D_{i_k j_1} & D_{i_k j_2} & \cdots & D_{i_k j_k} \end{bmatrix}$$ olsun.

a) $i_1 = j_1,\ i_2 = j_2, \ldots, i_k = j_k$ alırsak

$$M = \begin{bmatrix} d_{i_1} & & 0 \\ & d_{i_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & d_{i_k} \end{bmatrix}$$ olur.

ve $|M| = d_{i_1} \cdots d_{i_k}$ bulunur.

$i_1 = j_1, \ldots, i_{l-1} = j_{l-1}, \quad i_l \neq j_l$



$a_{i_l j_l} = 0$ olur

$|M| = 0$ buluruz.

D nin $k \times k$ sıfırdan farklı tüm minörleri $d_{i_1} \cdot d_{i_2} \cdots d_{i_k}$ şeklindedir. Bunların ebobu

$$D = \left[\begin{array}{cccc|c} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_r & \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right]$$

$\underline{d_2 \cdot d_5 \cdot d_7}$

$\underline{d_1 \cdot d_6 \cdot d_7}$

$\boxed{d_2 \cdot d_3 \cdot d_4}$

$\vdots$

ebobları $d_1 \cdot d_2 \cdots d_k$ dir.

$d_i \mid d_{i+1}$

sıfırdan farklı

$\Delta_k = k \times k$ minörlerin ebobu

$$\Delta_k = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k \Rightarrow d_k = \frac{\Delta_k}{d_1 \cdot \ldots \cdot d_{k-1}}$$

$$d_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$$

$$A \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_k & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right]$$

Tanım: A, $\mathbb{R}[x]$ üzerinde $n \times n$ tipinde bir matris olsun.

i) Aşağıdakileri sağlayan tek türlü belirli

$$D_A = \text{köşeg}[d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0]$$ matrisi

A nın Smith Normal Formu (Biçimi) olarak adlandırılır:

a) d_i ler monik.

b) Her i için $d_i \mid d_{i+1}$

c) D_A A ya denktir.

ii) Köşegen üzerindeki $d_1, d_2, \ldots, d_r$ terimleri ne A nın değişmez çarpanları;

iii) d_i lerin asal polinom kuvveti şeklindeki bölenlerine A nın temel bölenleri denir.

Örnek: $D = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & x & & \\ & & & x^3 & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$ için

D. çarpanlar $= \{1, 1, x, x^3\}$

T. bölenler $= \{x, x^3\}$

Örnek:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3(x+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Değişmez Çarpanlar; $\{\underline{1},\ x-1,\ (x-1)^3(x+1)^2\}$

Temel Bölenler $= \{x-1,\ (x-1)^3,\ (x+1)^2\}$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

S.N.F. değildir.

$$\boxed{1 = \underbrace{(-1)}_{p}\underbrace{(x^2-1)}_{\alpha} + \underbrace{x}_{q}\cdot\underbrace{x}_{b}}$$

$d_1 = 1$

$d_2 = x$

$d_3 = x^2-1$

$d_2 \nmid d_3$

$$\xrightarrow{-x.S_2+S_3} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & x^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+c_3} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & -x^2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-S_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & x^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{-x\cdot S_3 + S_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-x^3 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{C_2 + C_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & -x^2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-x^2\cdot C_3 + C_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & x-x^3 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$