Örnek: W, $\mathbb{R}^4$ ün $u_1=(1,2,-3,4)$, $u_2=(1,3,-2,6)$, $u_3=(1,4,-1,8)$ vektörlerinin gerdiği uzay olsun. W nun sıfırlayanı için bir baz bulunuz.

$[a,\ldots,d]\begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ t \end{bmatrix}$

$f(x,y,z,t)=ax+by+cz+dt$ öyle ki

$f(u_1)=f(u_2)=f(u_3)=0$ olsun.

$f(u_1)=a+2b-3c+4d=0$

$f(u_2)=a+3b-2c+6d=0$

$f(u_3)=a+4b-c+8d=0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$b=-c-2d \quad c=s,\ d=u$ dersek $b=-s-2u$

$$a=-2b+3c-4d=-2(-c-2d)+3c-4d$$
$$=5c=5s$$

$$ax+by+cz+d.t=5s.x+(-s-2t)y+s.z+u.t$$

$$\begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$f(\quad)=\underline{\underline{s}}(5x-y+z)+\underline{\underline{u}}(-2y+t)$$

$$f_1=5x-y+z \quad , \quad f_2=-2y+t$$

$$W^0=\text{Gen}\{f_1, f_2\}$$

V sonlu boyutlu vektör uzayı

V^*: lineer formlar uzayı

$(V^*)^*$?

İkinci Dual

V bir vektör uzayı ve $\alpha \in V$ alalım. α, V^* üzerinde aşağıdaki şekilde bir lineer form tanımlar:

$$L_\alpha : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$L_\alpha(f) = f(\alpha)$$

1) L_α lineerdir:

i) $f, g \in V^*$ için $\quad L_\alpha(f+g) \overset{?}{=} L_\alpha(f) + L_\alpha(g)$ ✓

$$\underline{L_\alpha(f+g)} = (f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$$
$$= \underline{L_\alpha(f)} + \underline{L_\alpha(g)} \checkmark$$

ii) $c \in \mathbb{R}$ ve $f \in V^*$ alalım.

$$L_\alpha(c.f) \overset{?}{=} c.L_\alpha(f)$$
$$L_\alpha(c.f) = (c.f)(\alpha) = c \cdot f(\alpha) = c.L_\alpha(f) \checkmark$$

L_α (i) ve (ii) den lineerdir.

2) Eğer $\underline{\underline{\alpha}} \neq 0_V$ ise $L_\alpha \neq 0$

$\alpha \neq 0_V$ olduğundan $\{\alpha\}$ küme V nin lineer bağ. siz bir kümesidir. Bu kümeyi V için baz olacak şekilde genişletelim.

$S = \{\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\alpha_2}}, \underline{\underline{\alpha_3}}, \ldots, \underline{\underline{\alpha_n}}\}$ sıralı bazını alalım.

$$\alpha = 1.\alpha + 0\alpha_2 + \ldots 0$$

$$v = a_1\alpha + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n$$

$\pi_1 : f : V \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(v) = [v]_S$. teki 1. bileşen

$$\underline{[v]_S} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$$

$f(\alpha) = 1$

Teorem 8: V sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. Her $\alpha \in V$ için

$$L_\alpha(f) = f(\alpha)$$

tanımlansın. $\alpha \longmapsto L_\alpha$ fonksiyon V ile V^{**} arasında bir izomorfizmdir.

İspat: $\phi : V \longrightarrow V^{**}$

$$\alpha \longmapsto L_\alpha$$

$$\phi(\alpha) = L_\alpha$$

1) ϕ lineerdir.

i) Her $\alpha, \beta \in V$ için $\phi(\alpha+\beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$

$$\phi(\alpha+\beta) = L_{(\alpha+\beta)}$$

$$\phi(\alpha+\beta)(f) = L_{\alpha+\beta}(f) = f(\alpha+\beta)$$

$$= f(\alpha) + f(\beta)$$

$$= \underbrace{L_\alpha(f)} + L_\beta(f)$$

$$= \phi(\alpha)(f) + \phi(\beta)(f)$$

$$\phi(\alpha+\beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta) \checkmark$$

ii) $c \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in V$ olsun.

$$\phi(c\cdot\alpha) \stackrel{?}{=} c\cdot\phi(\alpha)$$

$$\phi(c\cdot\alpha) = c\cdot\phi(\alpha)$$

$$\uparrow$$

$$\phi(c\cdot\alpha) = L_{c\cdot\alpha}$$

$$\phi(c\cdot\alpha)(f) = L_{c\cdot\alpha}(f) = f(c\cdot\alpha) = c\cdot f(\alpha) = c\cdot\phi(\alpha)(f)$$

$$L_\alpha : \underline{V^*} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{\text{boy}}\, V = \text{boy}(V^*) = \underline{\text{boy}(V^*)^*}$$

$$\phi : V_n \longrightarrow V_n^{**}$$

$$\alpha \qquad\qquad L_\alpha$$

(i) ve (ii) den ϕ lineer dönüşümdür.

Önceki önermeden, $\alpha \neq 0_V$ ise $\phi_\alpha \neq 0$ olduğundan ϕ nin çekirdeği $\{0_V\}$ dir.

Böylece ϕ birebirdir.

V ve V^{**} boyutları eşit olduğundan ve ϕ birebir olduğundan ϕ aynı zamanda örtendir.

Böylece ϕ, V ve V^{**} arasında bir izomorfizmdir.

Sonuç: V sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. L, V^* üzerinde bir lineer form olsun ($L \in V^{**}$). Bu durumda V nin öyle bir α vektörü vardır ki $\underline{L = L_\alpha}$ olur.

İspat: $\phi : V \longrightarrow V^{**}$ izomorfizmi (örten) olduğundan $\phi(\alpha) = L$ olacak bir $\alpha \in V$ vardır.

$\phi(\alpha) = L_\alpha$ olduğundan $L = L_\alpha$ dır.

Sonuç: V sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. V^* ın her bazı V deki bir bazın dualidir.

$$V^* \longrightarrow V^{**} \qquad V^*$$

$$V \qquad V^*$$

$$S \longrightarrow S^*$$

$$? \longmapsto T$$

İspat: $S^* = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ V^* ın bir bazı olsun. S^* ın V^{**} de bir dual bazı $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ vardır.

$L_i(f_j) = \delta_{ij}$

Bir önceki önermeden; her i için

L_i nin bir α_i ye karşılık gelen L_{α_i}

olduğunu biliyoruz.

$\{L_1, \ldots, L_n\} = \{L_{\alpha_1}, L_{\alpha_2}, \ldots, L_{\alpha_n}\}$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ V için bir bazdır:

$\underline{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n} = 0$ olsun. Her $f \in V^*$ için

$$L_{a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n}(f) = f(\underbrace{a_1\alpha_1 + \ldots + \alpha_n a_n}_{0}) = 0$$

$\{f_1, \ldots, f_n\}$ bazına uygularsak:

$$L_{a_1\alpha_1+\dots+a_n\alpha_n}(f_i) = 0$$

$$f_i(a_1\alpha_1+\dots+a_n\alpha_n) = \underbrace{a_1 f_i(\alpha_1)+\dots}_{0} + a_i \underbrace{f_i(\alpha_i)}_{1}$$

$$+ \underbrace{\dots + a_n f_i(\alpha_n)}_{0} = 0$$

$\{L_{\alpha_1},\dots,L_{\alpha_n}\}$

$\{f_1,\dots,f_n\}$ in dual bazı

$$f_i(\alpha_1) = L_{\alpha_1}(f_i) = \delta_{1i}$$

$$f_i(\alpha_i) = L_{\alpha_i}(f_i) = 1$$

$\vdots$

$\Rightarrow a_i = 0$

Her i için tekrarlandığında

$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \Rightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ lin bğsız.

V n boyutlu olduğundan $\{f_1, \ldots, f_n\}$ bazdır

V $\qquad$ V^*

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = S$ $\qquad$ $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} = S^*$

S^*, S in dual bazıdır:

$f_1(\alpha_1) = L_{\alpha_1}(f_1) = 1$ $\qquad$ $f_1(\alpha_2) = L_{\alpha_2}(f_1) = 0$

$f_1(\alpha_n) = L_{\alpha_n}(f_1) = 0$

Her $i \in \{1, \ldots, n\}$ için $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$ olur.

$\Rightarrow \{f_1, \ldots, f_n\} = S^*$ bazı S in dual bazıdır.

Teorem 9:- V sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $S \subseteq V$ bir alt küme olsun. Bu durumda $(S^0)^0$, S in V de gerdiği uzaydır.

İspat: $Ger(S) = W$ diyelim.

$W^0 = S^0$ olur.

$$\begin{aligned} &\text{boy } W + \text{boy } W^0 = \text{boy } V \\ - \; &\text{boy } W^0 + \text{boy } W^{00} = \text{boy } V^* \end{aligned} \Bigg] \; ||$$

$$\text{boy } W = \text{boy } W^{00}$$

Eğer $\boxed{W \subseteq W^{\circ\circ}}$ altuzayı ise $\underline{W = W^{\circ\circ}}$ olur.

$\alpha \in W$ olsun. $f \in W^{\circ}$ olsun

$$L_\alpha(f) = f(\alpha) = 0$$

$$\alpha \longmapsto L_\alpha \in W^{\circ\circ}$$

$$W \subseteq (W^{\circ})^{\circ}$$

$$\alpha \longmapsto L_\alpha$$

$$L_\alpha(f) = 0 \quad (f \in W^{\circ} \text{ için})$$

$$f(\alpha) = 0$$