

Halka:

Boş olmayan bir R kümesi verilmiş olsun.
Eğer R nin $+$ ve \cdot şeklinde iki ikili
işlemi var ve bu işlemler aşağıdaki şartla-
rı sağlıyorsa R 'ye bir birimli halka denir:

- $\left. \begin{array}{l} R, + \\ \text{değişmeli} \\ \text{grubu} \end{array} \right\}$
- $+$: 1) Her $x, y \in R$ için $x+y \in R$
 - 2) Her $x, y, z \in R$ için $(x+y)+z = x+(y+z)$
 - 3) Her $x, y \in R$ için $x+y = y+x$
 - 4) R de böyle bir 0_R elemanı vardır ki;
her $x \in R$ için $x + 0_R = 0_R + x$
 - 5) her $x \in R$ elemanına karşılık;
 $x + y = y + x = 0_R$ olacak şekilde bir $y (= -x)$ vardır

- : 1) Her $x, y \in R$ için $x \cdot y \in R$
- 2) Her $x, y, z \in R$ için $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- 3) R de, her $x \in R$ için

$$1_R \cdot x = x \cdot 1_R = x$$

sağlayan bir (birim) $1_R \in R$ vardır.

- 4) Her $x, y, z \in R$ için

$$(i) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(ii) \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Boylece $\langle R, +, \cdot \rangle$ cebirsel yapısı, birimli bir halkadır.

- işleni yukarıdakilere ek olarak

5) Her $x, y \in R$ için

$$x \cdot y = y \cdot x$$

sağlıyorsa, R ye birimli değişmeli
bir halka denir.

Örnek: \mathbb{Z} tam sayılar kümesi, $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$

birimli ve değişmeli bir halkadır.

Örnek: $R[x] =$ katsayıları R 'de olan polinomlar
kümesi; polinom toplama ve polinom çarpımı
işlemleri ile birimli, değişmeli bir halkadır.

Örnek: $\mathbb{R}^{3 \times 3} = 3 \times 3$ reel terimli matrisler kümesi, matris toplama ve matris çarpma işlemleri ile bir birimli halkadır; ancak değişmeli değildir.

Tanım: R birimli değişmeli bir halka olsun.
 n ve $k \neq 0_R$ verildiğinde

$$n = k - r$$

olacak şekilde bir $r \in R$ varsa; k ve n yi böler denir.

$$\text{Örnek: } R = \mathbb{Z} ; \quad n = 6, \quad k = 3$$

$$n = k \cdot r$$

$$6 = 3 \cdot 2$$

$$\Rightarrow 3 \mid 6 \quad (3, 6 \text{ yi böler})$$

$$\Rightarrow 2 \mid 6 \quad (2, 6 \text{ yi böler})$$

$$\text{Örnek: } 0 = 0 \cdot 3 \quad 3 \mid 0$$

$$\text{Örnek: } (x-1) \mid (x^2-1)$$

Tanım: \mathbb{Z} 'de ($R[x]$ 'te) ikisi' birden
0 olmayan a ve $b \in \mathbb{Z} (R[x])$ için
aşağıdakileri sağlayan d pozitif (monik)
tam sayısına (polinomuna) a ve b 'nin
en büyük ortak böleni denir:

1) $d|a$ ve $d|b$

2) $e|a$ ve $e|b$ ise $e|d$.

Örnek: $a=30$ $b=45$ için

1) $\underline{15 \mid 30}$ ve $\underline{15 \mid 45}$

2) $e \mid 30$ ve $e \mid 45$ ise $e \mid 15$
2. $\textcircled{15}$ 3. $\textcircled{15}$

30'un bölenleri: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm \boxed{15}, \pm 30$

45'in bölenleri: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 9, \pm \boxed{15}, \pm 45$

$$\text{Örnek : } p = (x-1)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot \underline{(x^2+x+1)}$$

$$c_j = \underbrace{(x^2-1)}_{\text{circled}} \cdot \underline{(x^2+x+1)}$$

$$(x^2-1) \cdot (x^2+x+1) = d$$

Kanonical Biçimler (Formlar):

1. Polinom matrislerinin normal formu:

$R[x]$ = katsayıları R 'de olan polinom halkası.

$R[x]^{n \times n}$ = $n \times n$ tipinde, terimleri polinomlar olan matrisler kümesi.

Tanım: $R[x]$ üzerinde $n \times n$ tipindeki A ve B matrisleri aşağıdaki 3 tip işlemle birbirine dönüştürülebiliyorsa A ve B satırca denktir denir:

1) A nın bir satırını sıfırdan farklı bir skalarla çarpmak:

$$c \cdot S_i \rightarrow S_i \quad (c \neq 0)$$

2) A nın i . satırının bir $p(x)$ katını j . satıra toplamak

$$p(x) \cdot S_i + S_j \rightarrow S_j$$

3) A nın i . ve j . satırlarının yer değiştirmesi

$$S_i \leftrightarrow S_j$$

Yukarıdaki işlemlere elementer satır işlemleri denir.

Benzer şekilde elementer sütun işlemleri tanımlanabilir. Elementer sütun işlemleri ile birbirine dönüştürülebilen matrislere sütunca denktir denir.

$$B = E_k \dots E_2 \cdot E_1 \cdot A, \quad (E_i; \text{elementer matrisler})$$

(B ve A satırca denk)

$$B = A \cdot \overline{E_1} \dots \overline{E_s} \quad (B \text{ ve } A \text{ sütunca denk})$$

$$A = [c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_n]$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = \underline{c_1 \cdot x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n \cdot x_n}$$

$$A \cdot E = [c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_n] [e_1 \mid \dots \mid e_n]$$

$$= [A \cdot e_1 \mid A \cdot e_2 \mid \dots \mid A \cdot e_n]$$

Lemma:

- * Elementer matrislerin determinantları sıfırdan farklı skalerlerdir. $I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$
- * Elementer matrisler tersinirdir ve tersleri de elementer matristir.
- * $R[x]$ üzerinde $n \times n$ bir matrisin tersinin olması için G.Y.Ş determinantının sıfırdan farklı bir skaler olmasıdır.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & y & (-3) \end{array} \quad \left| \begin{array}{ccc} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = x$$

A ve B $\mathbb{R}[x]$ üzerinde $n \times n$ matrisler
ve biri diğerinden elementer satır ve/veya
sütun işlemkri ile elde edilebiliyorsa
 A ve B denktir denir.

$$B = E_r \dots E_2 E_1 \cdot A \cdot F_1 \cdot F_2 \dots F_r$$

\downarrow elem. \downarrow
elem. matrisler.

Lemma 1: Eğer A ve B $R[x]$ üzerindeki $n \times n$ matrisler ise her $k \leq n$ için

A nin $k \times k$ minörlerinin ebobu ile

B nin $k \times k$ minörlerinin ebobu eşittir.

$A =$

x_1	y_1	z_1
x_2	y_2	z_2
x_3	y_3	z_3

x_1	y_1	z_1
x_2	y_2	z_2
x_3	y_3	z_3

"
 A nin 3×3 b.ç
 minörü

İspat: 1- Satırca Denklikte:

$$\underline{A' = P \cdot A} \quad \text{ve } P \text{ } n \times n \text{ } R[x] \text{ üzerinde}$$

tersinir bir matris olsun. $M, (A')$ nün

$k \times k$ bir alt matrisi olsun;

$$M = \begin{bmatrix} A'_{i_1 j_1} & A'_{i_1 j_2} & \dots & A'_{i_1 j_k} \\ A'_{i_2 j_1} & A'_{i_2 j_2} & \dots & A'_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A'_{i_k j_1} & A'_{i_k j_2} & \dots & A'_{i_k j_k} \end{bmatrix}$$

$$[d_1 d_2 \dots d_n] \cdot \begin{bmatrix} \text{---} s_1 \text{---} \\ \text{---} s_2 \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} s_n \text{---} \end{bmatrix}$$

$$= [d_1 s_1 + d_2 s_2 + \dots + d_n s_n]$$

$$P \cdot A = A'$$

$$\begin{bmatrix} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ | \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 s_1 + \dots + d_n s_n \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(A') nün her satırı

$$\underline{\underline{\alpha_1}} = (A_{1j_1}, A_{1j_2}, \dots, A_{1j_k})$$

$$\underline{\underline{\alpha_2}} = (A_{2j_1}, A_{2j_2}, \dots, A_{2j_k})$$

$$\vdots$$

$$\underline{\underline{\alpha_n}} = (A_{nj_1}, A_{nj_2}, \dots, A_{nj_k})$$

(M) nin her bir satırı $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ in bir linear birleşimidir.

Bu durumda M şu şekilde yazılabilir:

$$M = \begin{bmatrix} f_{11} \underline{x}_1 + f_{12} \underline{x}_2 + \dots + f_{1n} \underline{x}_n \\ f_{21} x_1 + f_{22} x_2 + \dots + f_{2n} x_n \\ \vdots \\ f_{n1} x_1 + f_{n2} x_2 + \dots + f_{nn} x_n \end{bmatrix}$$

$$\det(M) = \sum_{F_{1,2}, \dots, l_k \in \mathbb{R}[x]} F_{1,2}, \dots, l_k \cdot \det \begin{bmatrix} x_{l_1} \\ x_{l_2} \\ \vdots \\ x_{l_k} \end{bmatrix}$$

(Determinantın satırlar üzerinde lineer olduğunu).

$$\left| \begin{bmatrix} \overline{u+v} \\ \omega \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \overline{u} \\ \omega \end{bmatrix} \right| + \left| \begin{bmatrix} \overline{v} \\ \omega \end{bmatrix} \right|$$

$\det(M)$, satırları $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$
 kümesinin k 'li elemanlarından oluşan
 matrislerin determinantları toplamıdır.

Böylece $\det(M)$, A nin $k \times k$ minörleri
 nin bir lineer birleşimidir.

$\Delta_k = A$ nin $k \times k$ minörlerinin ekbabı (N_1, N_2, \dots, N_M)

$\Delta'_k = (A')$ nin $k \times k$ " " $\rightarrow (M)$

Δ_k A nin bütün $k \times k$ minörlerini kapsar

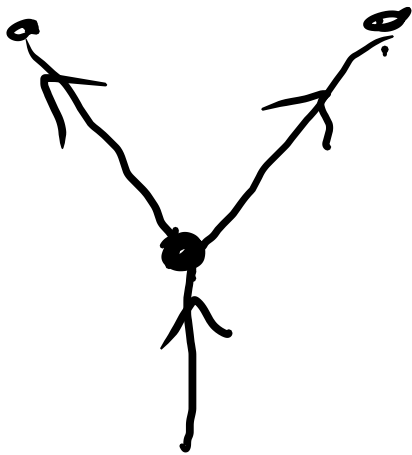
$$\underline{M} = c_1 \underset{\downarrow}{N_1} + c_2 \underset{\downarrow}{N_2} + \dots$$

$$\Delta_k \mid M$$

$$\Delta_k (= f')$$

(cl-) $\Delta_k = \underbrace{A' \text{ nın } k \times k \text{ minörlerinin ebbu.}}$

$$\Rightarrow \Delta_k \mid A_k$$



$$\text{ebb}(a, b) = d$$

$$\Leftrightarrow 1) d \mid a \text{ ve } d \mid b$$

$$2) e \mid a \text{ ve } e \mid b \text{ ise}$$

$$e \mid d.$$

2) A ve B denk olduklarından;

$R[x]$ üzerinde, tersinir P ve Q $n \times n$

matrisleri için $B = P \cdot A \cdot Q$ şeklindedir.

$\Delta_k = A$ nin $k \times k$ minörlerinin ebbu

$\Delta'_k = (P \cdot A)$ nin " " " .

$\Delta''_k = P \cdot A \cdot Q = B$ nin " " " ,

$\Delta_k \mid \Delta'_k$ olduğunu biliyoruz.

$$B = P \cdot A \cdot Q$$

$$B^T = (P \cdot A \cdot Q)^T$$

$$B^T = Q^T \cdot \underbrace{A^T \cdot P^T}$$

$$B^T = Q^T \cdot (P \cdot A)^T$$

$$\underbrace{\begin{matrix} \Delta_k' \\ \Delta_k'' \end{matrix}}_{Q \cdot P}$$

$$\begin{matrix} X \\ \downarrow \\ |K| \end{matrix} = \begin{matrix} X^T \\ \downarrow \\ |K^T| \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \Delta_k' & \Delta_k'' \\ \Delta_k' & \Delta_k'' \end{matrix}$$

$$P \cdot A$$

$$3) \quad \frac{B = P(A)Q \text{ iken } \Delta_k | \Delta_k''}{A = P^{-1}(B)Q^{-1} \quad \Delta_k'' | \Delta_k}$$

$$\Leftrightarrow \underset{\uparrow A}{\Delta_k} = \underset{\uparrow B}{\Delta_k''}$$