$\cancel{\left[\, 1 \quad x - x^3 \,\right]}$ Doğrusu $\left[\, 1 \quad 1 \cdot x^3 - x \,\right]$

$\downarrow$

monik

Sonuç:

b) $\mathbb{R}[x]$ üzerinde $n \times n$ tipinde A ve B nin denk olması için G.Y. şart $B = P.A.Q$ olacak şekilde $\mathbb{R}[x]^{n \times n}$ P ve Q tersinir matrislerin olmasıdır.

a) $\mathbb{R}[x]$ üzerinde $n \times n$ A matrisinin tersinir olması için G.Y. şart A nın elementer matrislerin bir çarpımı olmasıdır.

c) Denk matrislerin normal formu eşittir.

d) $\mathbb{R}[x]$ üzerinde $n\times n$ tipindeki her A için, A ve A^T un normal formları eşittir.

İspat: a $\Rightarrow$ (A tersinir olsun).

A nın normal formu D_A olsun.

$$D_A = \text{köşeg}[d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0]$$

Her i için $d_i \mid d_{i+1}$ ve d_i ler monik.

A ve D_A denk olduklarından öyle elementer $E_1, \ldots, E_k, F_1, \ldots, F_s$ matrisleri vardır ki

$$D_A = E_k \ldots E_1 . A . F_1 \ldots F_s$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 1 . x^a \\ \downarrow \\ c . 1 \\ \downarrow \text{monik} \\ 1 \end{array}$$

Her iki tarafın determinantıyla

$$|D_A| = \underbrace{|E_k| \ldots |E_1|}_{\neq 0} . \underbrace{|A|}_{\neq 0} . \underbrace{|F_1| \ldots |F_s|}_{\neq 0}$$

$\Rightarrow |D_A| = d_1 . d_2 \ldots d_r$ ve $|D_A| \neq 0$.

$d_1 | d_2 | \ldots | d_r$. $\quad d_i$ monik. $\Rightarrow d_i = 1$

$$A = E_1^{-1} \ldots E_k^{-1} \overset{I_A}{I} \cdot F_s^{-1} \ldots F_1^{-1} \rightarrow \text{Elem. matrisl. çarpımı}$$

E_j^{-1} ve F_k^{-1} birer elementer matris.

$(\Leftarrow)$ A elem. matrislerin çarpımı ise;

$A = E_1 . E_2 \ldots E_k$ ise

$$(E_1 E_2 \ldots E_k)^{-1} = E_k^{-1} \ldots E_1^{-1} = A^{-1}$$

dolayısıyla A da tersinirdir

b) $\Rightarrow$ A ve B denk olsun.

$$B = \underbrace{E_1 \cdots E_k}_{P} A . \underbrace{F_1 \cdots F_s}_{Q}$$

olacak şekilde E_j, F_ℓ elementer matrisler vardır.

$$B = P . A . Q$$

P ve Q elem. matrisl. çarpımı old.dan tersinir-dir

($\Leftarrow$) P ve Q tersir olmak üzere $B = P.A.Q$ olsun

(a)'dan; P ve Q elem. matrislerin çarpımıdır.

$$B = E_1 \cdots E_k . A . F_1 \cdots F_s \Rightarrow B \overset{\text{denk}}{\sim} A$$

c) A ve B denk olsun.

$B = P \cdot A \cdot Q$ olacak şekilde P ve Q

tersinir matrisler var.

B'nin Smith Formu D_B olsun.

B ye uygulanacak elem. işlemlerle

$R \cdot B \cdot S = D_B$ elde edilir. $B \sim D_B$

$R B S = \underbrace{RP} \cdot A \cdot \underbrace{QS} = D_B$

$A \sim D$

$A \sim D_B$

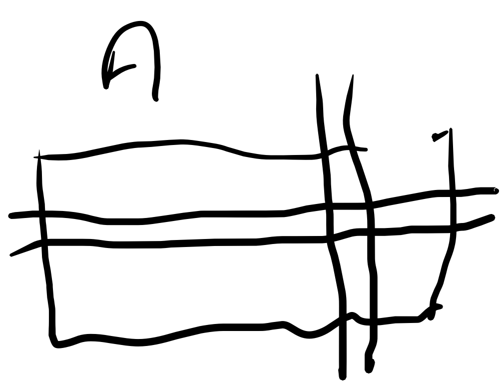
Smith Form un tekliğinden $D_B = D_A$

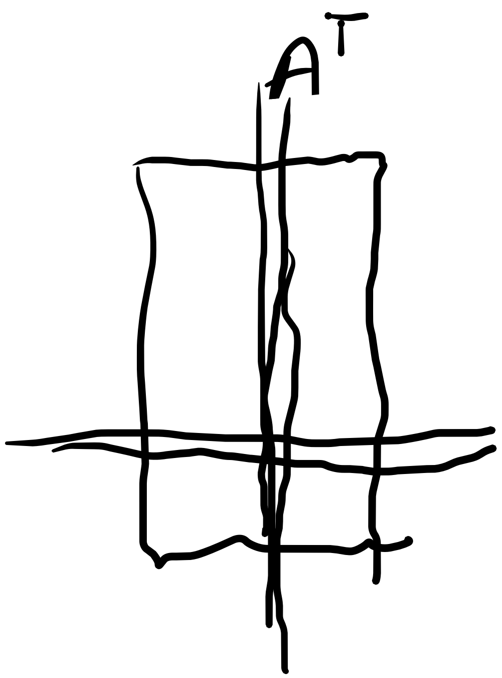
$\left(d_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} \right)$

d) A $n\times n$ $R[x]$ üzerinde bir matris ise;

A nın $i\times i$ bir alt matrisi K_i ise;

K_i, A^T un $i\times i$ tipinde bir $L_i = K_i^T$ alt matrisine denk gelir. Bu durumda





$\Delta_i(A) = A$ nın $\underline{i\times i}$ minörlerinin ebobu $= A^T$ un $\underline{i\times i}$ minörlerinin ebobu.

$D_A = [d_1, d_2, \dots, d_r, 0, \dots, 0] = D_{A^T}$

$$d_i = \frac{\Delta_i(A)}{\Delta_{i-1}(A)} = \frac{\Delta_i(A^T)}{\Delta_{i-1}(A^T)}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} x^2 & x+1 & 0 \\ x^2-1 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 3(x+1)^2 \end{bmatrix}$ S.N. Formu = ?

1. $x^2 + (-1)(x^2-1) = 1$

$$-S_2 + S_1 \rightarrow S_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{x^2-1} & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 3(x+1)^2 \end{bmatrix}$$

$$(1-x^2)S_1 + S_2 \rightarrow S_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 3.(x+1)^2 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{3}.S_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)^2 \end{bmatrix}$$

Değişmez çarpanlar: $1, \ x+1, \ (x+1)^2$

Temel bölenler: $(x+1), \ (x+1)^2$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2x+1 & x & -x & x+1 \\ x-1 & x-1 & 0 & x-1 \\ 0 & 0 & x^2-1 & 0 \\ x-1 & x-1 & x^2-1 & x-1 \end{bmatrix}, \quad D_A = ?$$

$$2 \cdot C_3 + C_1 \to C_1 \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & x & -x & x+1 \\ x-1 & x-1 & 0 & x-1 \\ 2x^2-2 & 0 & x^2-1 & 0 \\ 2x^2+x-3 & x-1 & x^2-1 & x-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (-x)C_1+C_2 \\ x\,C_1+C_3 \\ -(x+1)C_1+C_4 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x-1 & 2x-x^2-1 & x^2-x & (x-1)(-x-1+1) \\ 2x^2-2 & -2x^3+2x & 2x^3+x^2-2x-1 & (2x^2-2)(-x-1) \\ 2x^2+x-3 & -2x^3-x^2+4x-1 & 2x^3+2x^2-3x-1 & -(2x^2+x-3)(x+1)+x-1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x-x^2-1 & x^2-x & -x\cdot(x-1) \\ 0 & -2x^3+2x & (2x+1)(x^2-1) & (2x^2-2)(-x-1) \\ 0 & -2x^3-x^2+4x-1 & 2x^3+2x^2-3x-1 & -(2x^2+x-3)(x+1)+x-1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$2x^3+2x^2-3x-1=(x-1)(2x^2+4x+1)$$

$$-2x^3-x^2+4x-1=(x-1)(-2x^2-3x+1)$$

$$2x^2+x-3$$

$$\begin{array}{cc} 2x & 3 \\ x & -1 \end{array}$$

$$-(x+1)(2x+3)(x-1)+(x-1)$$

$$(x-1)\left(-(x+1)(2x+3)+1\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(x-1)^2 & x(x-1) & -x(x-1) \\ 0 & -2x(x^2-1) & (2x+1)(x^2-1) & -(2x^2-2)(x+1) \\ 0 & (x-1)(-2x^2-3x+1) & (x-1)(2x^2+4x+1) & (x-1)\left(-(x+1)(2x+3)+1\right) \end{bmatrix}$$

$$-(x-1)(2x-1)(x+1)$$

$$C_3+C_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & x(x-1) & -x(x-1) \\ 0 & x^2-1 & (2x+1)(x^2-1) & -(2x^2-2)(x+1) \\ 0 & (x-1)(x+1) & (x-1)(2x^2+4x+1) & (x-1)\left((x+1)(2x+3)-1\right) \end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-(x+1)S_1 & 0 & x-1 & x(x-1) & -x(x-1) \\
+S_3 & 0 & 0 & (x^2-1)(x+1) & -(x^2-1)(x+2) \\
\sim & 0 & 0 & (x-1)(x^2+3x+1) & ? \\
-(x+1)S_2 & & & & \\
+S_4 & & & &
\end{array}
$$

$$-2(x^2-1)(x+1)+x(x^2-1) = \boxed{(x^2-1)(-x-2)}$$

$$-x(x^2-1) + (x-1)(2x^2+4x+1)$$

$$-x^3+x+2x^3+4x^2+x-2x^2-4x-1$$

$$x^3+2x^2-2x-1 = (x^3-1)+2x(x-1)$$

$$= (x-1)(x^2+x+1+2x)$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D_A$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (x-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & & & \end{matrix}$$