Halka:

Boş olmayan bir R kümesi verilmiş olsun. Eğer R nin $+$ ve $\cdot$ şeklinde iki ikili işlemi var ve bu işlemler aşağıdaki şartları sağlıyorsa R'ye bir birimli halka denir:

$<R,+>$ değişmeli grup.

$+$: 1) Her $x,y\in R$ için $x+y\in R$

2) Her $x,y,z\in R$ için $(x+y)+z=x+(y+z)$

3) Her $x,y\in R$ için $x+y=y+x$

4) R de öyle bir 0_R elemanı vardır ki;

her $x\in R$ için $x+0_R=0_R+x$

5) her $x\in R$ elemanına karşılık;

$$x+y=y+x=0_R$$

olacak şekilde bir $y\;(=-x)$ vardır

· : 1) Her $x, y \in R$ için $x \cdot y \in R$

2) Her $x, y, z \in R$ için $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

3) R de, her $x \in R$ için

$$1_R \cdot x = x \cdot 1_R = x$$

sağlayan bir (birim) $1_R \in R$ vardır.

4) Her $x, y, z \in R$ için

(i) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

(ii) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Böylece $\langle R, +, \cdot \rangle$ cebirsel yapısı, birimli bir halkadır.

• işlemi yukarıdakilere ek olarak

5) Her $x, y \in R$ için

$$x \cdot y = y \cdot x$$

sağlıyorsa, R ye birimli değişmeli bir halka denir.

Örnek: $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi, $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ birimli ve değişmeli bir halkadır.

Örnek: $\mathbb{R}[x]$ = katsayıları $\mathbb{R}$'de olan polinomlar kümesi; polinom toplamı ve polinom çarpımı işlemleri ile birimli, değişmeli bir halkadır.

Örnek: $\mathbb{R}^{3\times 3}$ = 3×3 reel terimli matrisler kümesi, matris toplamı ve matris çarpımı işlemleri ile bir birimli halkadır; ancak değişmeli değildir.

Tanım: R birimli değişmeli bir halka olsun. n ve $k \neq 0_R$ verildiğinde

$$n = k \cdot r$$

olacak şekilde bir $r \in R$ varsa; k n'yi böler denir.

Örnek : $R = \mathbb{Z}$; $n = 6$, $k = 3$

$$n = k \cdot r$$

$$6 = 3 \cdot 2$$

$\Rightarrow 3 \mid 6$ (3, 6 yı böler)

$\Rightarrow 2 \mid 6$ (2, 6 yı böler)

$$n = r \cdot k$$

Örnek : $0 = 0 \cdot 3$ $\quad 3 \mid 0$

Örnek : $(x-1) \mid (x^2-1)$

Tanım: $\mathbb{Z}$'de ($\mathbb{R}[x]$'te) ikisi birden 0 olmayan a ve $b \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{R}[x]$) için aşağıdakileri sağlayan $\underline{\underline{d}}$ pozitif (monik) tamsayısına (polinomuna) a ve b nin en büyük ortak böleni denir:

1) $d \mid a$ ve $d \mid b$

2) $e \mid a$ ve $e \mid b$ ise $e \mid d$.

Örnek: $a = 30 \quad b = 45$ için

d

1) $15 \mid 30$ ve $15 \mid 45$

2) $e \mid 30$ ve $e \mid 45$ ise $e \mid 15$

2. 15 3. 15

30 un bölenleri: $\mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 5, \mp 6, \mp 10, \boxed{\mp 15}, \mp 30$

45 in bölenleri: $\mp 1, \mp 5, \mp 3, \mp 9, \boxed{\mp 15}, \mp 45$

Örnek : $p = (x-1)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot (\underline{x^2+x+1})$

$q = (x^2-1) \cdot (\underline{x^2+x+1})$

$(x^2-1) \cdot (x^2+x+1) = d$

Kanonik Biçimler (Formlar):

1. Polinom matrislerinin normal formu:

$\mathbb{R}[x]$ = katsayıları $\mathbb{R}$'de olan polinom halkası.

$\mathbb{R}[x]^{n\times n}$ = $n\times n$ tipinde, terimleri polinomlar olan matrisler kümesi.

Tanım: $\mathbb{R}[x]$ üzerinde $n\times n$ tipindeki A ve B matrisleri aşağıdaki 3 tip işlemle birbirine dönüştürülebiliyorsa A ve B satırca denktir denir:

1) A nın bir satırını sıfırdan farklı bir skalerle çarpmak:

$$c \cdot S_i \rightarrow S_i \quad (c \neq 0)$$

2) A nın i. satırının bir $p(x)$ katını j. satıra toplamak

$$p(x) \cdot S_i + S_j \rightarrow S_j$$

3) A nın i.'ve j. satırlarının yer değiştirmesi

$$S_i \leftrightarrow S_j$$

Yukarıdaki işlemlere elementer satır işlemleri denir.

Benzer şekilde elementer sütun işlemleri tanımlanabilir. Elementer sütun işlemleri ile birbirine dönüştürülebilen matrislere sütunca denktir denir.

$B = E_k \dots E_2 . E_1 . A$, (E_i : elementer matrisler)

(B ve A satırca denk)

$B = A . \bar{E_1} \dots \bar{E_s}$ (B ve A sütunca denk)

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{array}\right]$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \; \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$A.X = \underline{c_1.x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n.x_n}$$

$$A.E = \left[\begin{array}{c|c|c|c} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} e_1 & \cdots & e_n \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} A.e_1 & A.e_2 & \cdots & A.e_n \end{array}\right]$$

Lemma:

* Elementer matrislerin determinantları sıfırdan farklı skalerlerdir.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

* Elementer matrisler tersinirdir ve tersleri de elementer matristir.

* $R[x]$ üzerinde $n \times n$ bir matrisin tersinir olması için G.Y.Ş determinantının sıfırdan farklı bir skaler olmasıdır.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & y(-3) & \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x$$

A ve B $\mathbb{R}[x]$ üzerinde $n \times n$ matrisler ve biri diğerinden elementer satır ve/veya sütun işlemleri ile elde edilebiliyorsa A ve B denktir denir.

$$B = E_r \ldots E_2 E_1 . A . F_1 . F_2 \ldots F_r$$

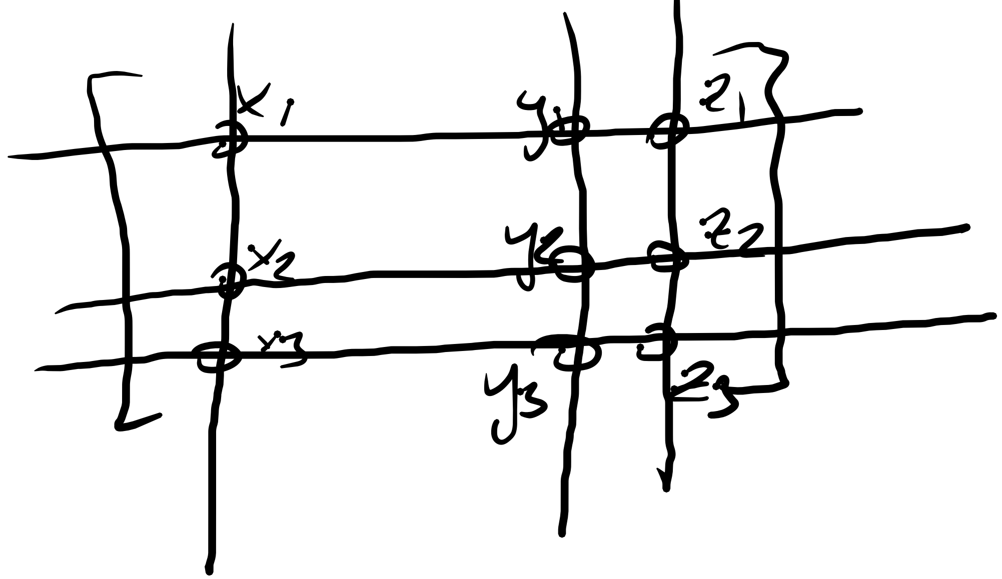
elem

elem. matrisler.

Lemma 1: Eğer A ve B $\mathbb{R}[x]$ üzerinde denk $\underline{n\times n}$ matrisler ise her $k \le n$ için

A nın $\underline{k \times k}$ minörlerinin ebobu ile

B nin $k\times k$ minörlerinin ebobu eşittir.

$A =$ 

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

"

A nın 3×3 bir minörü

İspat: 1- Satırca Denklikte:

$A' = P \cdot A$ ve P $n \times n$ $R(x)$ üzerinde

tersinir bir matris olsun. M, (A')nün

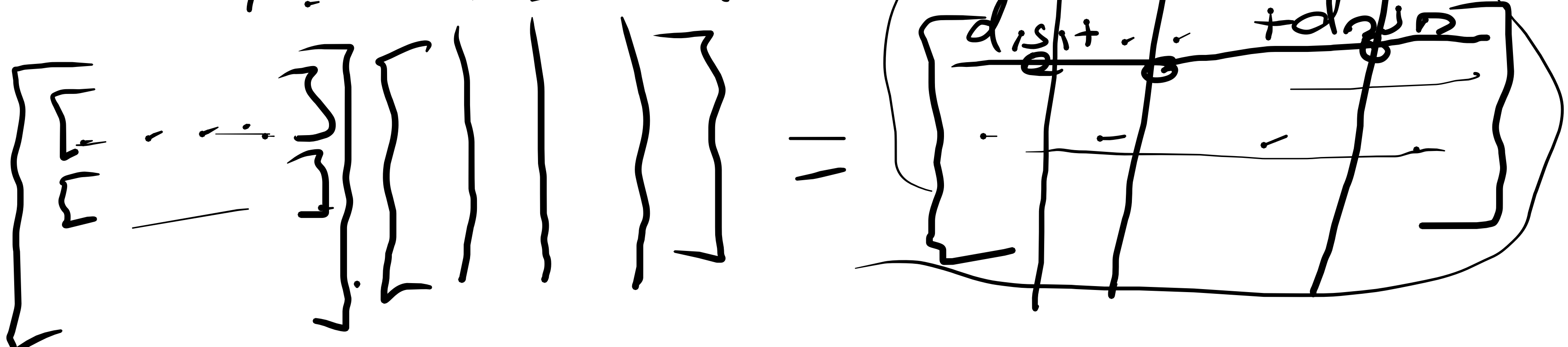
$k \times k$ bir alt matrisi olsun;

$$M = \begin{bmatrix} A'_{i_1 j_1} & A'_{i_1 j_2} & \cdots & A'_{i_1 j_k} \\ A'_{i_2 j_1} & A'_{i_2 j_2} & \cdots & A'_{i_2 j_k} \\ \vdots & & & \\ A'_{i_k j_1} & A'_{i_k j_2} & \cdots & A'_{i_k j_k} \end{bmatrix}$$

$$[d_1 \; d_2 \; \ldots \; d_n] \cdot \begin{bmatrix} \text{---} & s_1 & \text{---} \\ \text{---} & s_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & s_n & \text{---} \end{bmatrix}$$

$$= [d_1 s_1 + d_2 s_2 + \ldots + d_n s_n]$$

$$P \cdot A = A'$$



(A') nün her satırı

$$\alpha_1 = (A_{1j_1}, A_{1j_2}, \ldots, A_{1j_k})$$

$$\alpha_2 = (A_{2j_1}, A_{2j_2}, \ldots, A_{2j_k})$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n = (A_{nj_1}, A_{nj_2}, \ldots, A_{nj_k})$$

(M) nin her bir satırı $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ in bir lineer birleşimidir.

Bu durumda M şu şekilde yazılabilir:

$$M = \begin{bmatrix} f_{11}\underline{\alpha_1} + f_{12}\underline{\alpha_2} + \dots + f_{1n}.\underline{\alpha_n} \\ f_{21}\alpha_1 + f_{22}\alpha_2 + \dots + f_{2n}\alpha_n \\ \vdots \\ f_{n1}\alpha_1 + f_{n2}\alpha_2 + \dots + f_{nn}\alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\det(M) = \sum_{F_{l_1 l_2 \dots l_k} \in R[x]} F_{l_1 l_2 \dots l_k} \cdot \det \begin{bmatrix} \alpha_{l_1} \\ \alpha_{l_2} \\ \vdots \\ \alpha_{l_k} \end{bmatrix}$$

(Determinantın satırlar üzerinde lineer oluşundan).

$$\left| \begin{bmatrix} u+v \\ \hline w \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{matrix} u \\ \hline w \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} v \\ \hline w \end{matrix} \right|$$

det(M), satırları $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ kümesinin k'lı elemanlarından oluşan matrislerin determinantları toplamıdır.

Böylece det(M), A nın $k \times k$ minörleri nin bir lineer birleşimidir.

Δ_k = A nın $k \times k$ minörlerinin ebobu$(N_1, N_2, \ldots, N_t$

Δ_k' = (A') nün $k \times k$ " " $\to (M)$

Δ_k A nın bütün $k \times k$ minörlerini böler

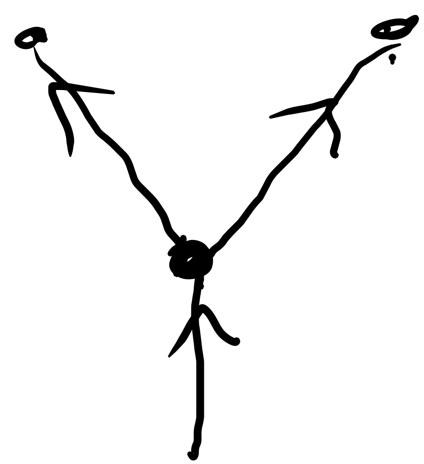
$M = c_1 N_1 + c_2 N_2 + \ldots$

$\Delta_k \mid M$

$\Delta_k = f$)

(d:) $\Delta_k' = \underbrace{A' \text{nün } k\times k \text{ minörlerinin ebobu.}}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_k \mid \Delta_k'}$$



$\text{ebob}(a,b) = d$

$\Leftrightarrow$ 1) $d \mid a$ ve $d \mid b$

2) $e \mid a$ ve $e \mid b$ ise

$e \mid d$.

2) A ve B denk olduklarından;

$\mathbb{R}[x]$ üzerinde, tersinir P ve Q $n \times n$ matrisleri için $B = P.A.Q$ şeklindedir.

$\Delta_k =$ A nın $k \times k$ minörlerinin ebobu

$\Delta_k' = (P.A)$ nın " " " .

$\Delta_k'' = P.A.Q = B$ nin " " " .

$\Delta_k \mid \Delta_k'$ olduğunu biliyoruz.

$$B = P \cdot A \cdot Q$$

$$B^T = (P \cdot A \cdot Q)^T$$

$$B^T = Q^T \cdot \underbrace{A^T \cdot P^T}$$

$$B^T = Q^T \cdot \underbrace{(\underline{P \cdot A})^T}_{\Delta_k' \mid \Delta_k''}$$

$\Delta k \; \Delta k'$

$\underline{Q \cdot D}$

$X \quad X^T$

$$|K| = |K^T|$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \Delta k \mid \Delta k' \;\; \text{vc} \\ \Delta_k' \mid \Delta_k'' \end{array}}$$

$P \cdot A$

3) $\underline{B = P \cdot A \cdot Q \text{ iken } \Delta_k \mid \Delta_k''}$

$A = P^{-1} \cdot B \cdot Q^{-1} \qquad \Delta_k'' \mid \Delta_k$

$\Longleftrightarrow \quad \underset{A}{\underset{\uparrow}{\Delta_k}} = \underset{B}{\underset{\uparrow}{\Delta_k''}}$