$S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, V nin bazı;

$S^* = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, V^* ın bazı ve

$$f_i(u_j) = \delta_{ij} \quad \text{ise}$$

S^*, S in dual bazı.

Lineer Formlar ve Alt uzaylar:

Önerme: V, n boyutlu bir vektör uzayı ve f V üzerinde bir lineer formsa ve $\underline{\underline{f \not\equiv 0}}$ ise

$$\text{sıfırlık}(f) = n-1 \text{ dir.}$$

İspat: Her $L: V \to W$ lin. dönş. için

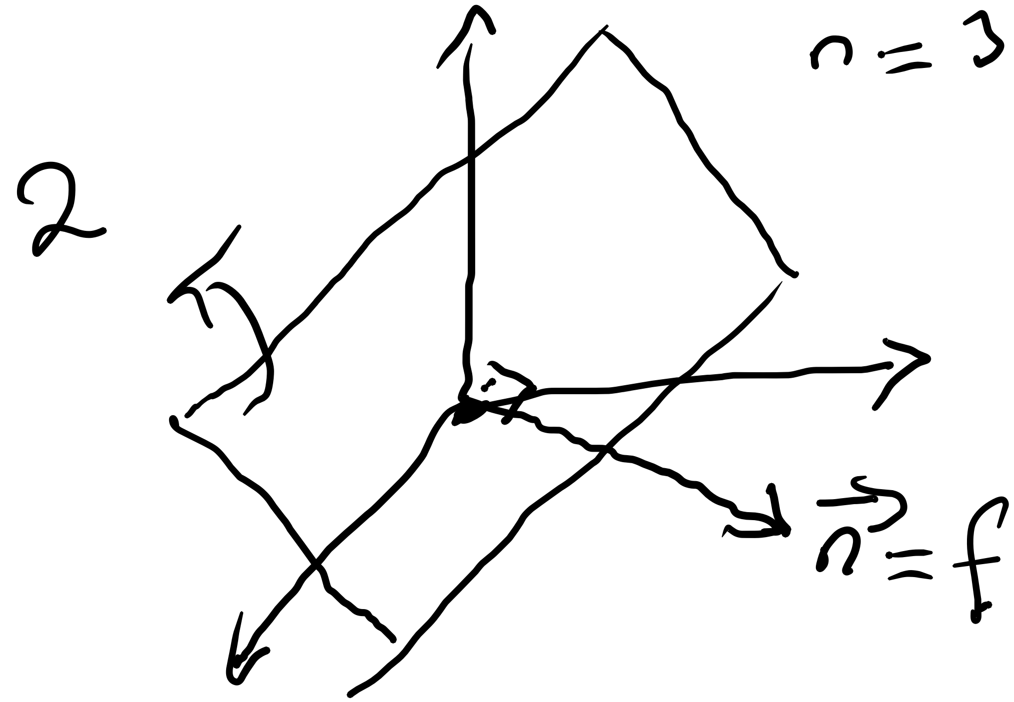
$$\text{rank}(L) + \text{sıfırlık}(L) = \text{boy } V.$$

$f: V \to \mathbb{R}$ formu da (özel bir) lin. dönşüm.

$$\text{rank}(f) + \text{sıfırlık}(f) = \text{boy}(V) = n \quad \text{ise}$$

$$[f]_S = [f(u_1) \; f(u_2) \; \dots \; f(u_n)] \Rightarrow \text{rank} = 1$$

$$\text{sıfırlık}(f) = n-1.$$



$\underline{AX + BY + CZ} = 0 \qquad (A, B, C) = f$

$\langle (A, B, C), (X, Y, Z) \rangle = 0$

Tanım: V n boyutlu bir vekt. uzayı ve W, boyutu $n-1$ olan bir alt uzay ise W ya V nin bir hiper uzayı denir.

Tanım: V bir vektör uzayı ve $S \subseteq V$ bir alt küme olmak üzere, S in anihilatörü (yutan kümesi)

$$S^{\circ} = \{ f \in V^* \mid \text{her } s \in S \text{ için } f(s) = 0 \}$$

ile tanımlanır.

Önerme: S°; V^* in bir alt uzayıdır.

İspat; $f, g \in \underline{\underline{S^\circ}}$ alalım.

Her $u \in S$ için $f(u) = g(u) = 0$

1) $f+g \overset{?}{\in} S^\circ$; $s \in S$ olsun.

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s) = 0 + 0 = 0$$

$f+g \in S^\circ$ ✓

2) $c \in \mathbb{R}$, $f \in S^\circ$ ise $(c.f) \overset{?}{\in} S^\circ$:

Herhangi bir $s \in S$ alalım,

$$(c.f)(s) = c.\ f(s) = c.0 = 0$$

$c.f \in S^\circ$ ✓

(1) ve (2) den, S° V^* in bir alt uzayıdır.

Örnek: $S=\{\vec{0}\}$, $S^0 = V^*$

Her $f \in V^*$ için $f(\vec{0}) = 0$ dır.

Örnek: $S = V$; $S^0 = \{0\}$

Her $v \in V$ için $0(v) = 0$

$V^* \ni f \neq 0$ ise $f(v) \neq 0$ şekilde bir $v \in V$ vardır.

$f \notin V^0$

Teorem 7 : V sonlu boyutlu bir vektör uzayı ; W V nin bir alt uzayı ise

$$boy(W) + boy(W^0) = boy\, V$$ dir.

İspat: $boy\, V = n$ ve $boy(W) = k$ olsun.

$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ W nun bir bazı olsun. S'i V için baz olacak şekilde $T = \{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ alalım. V^* in T ye dual olan

$T^* = \{f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n\}$ bazı vardır.

$$f_i(u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ için} \\ 0, & i \neq j \text{ için} \end{cases}$$

İddia: $T_1 = \{f_{k+1}, \ldots, f_n\}$, W^0 için bir bazdır:

$$\text{boy}\, W^0 = |T_1| = n-k = \text{boy}\, V - \text{boy}\, W$$

$$\begin{array}{c|c} f_1, \ldots, f_k & f_{k+1}, \ldots, f_n \\ \hline \underbrace{u_1, \ldots, u_k}_{W} & u_{k+1}, \ldots, u_n \end{array}$$

1) $f_{k+1}, \ldots, f_n \in W^0$:

$$\left.\begin{array}{ll} f_{k+1}(u_i) = 0 & (i \leq k \text{ için}) \\ f_{k+2}(u_i) = 0 & (i \leq k \text{ için}) \\ \vdots & \\ f_n(u_i) = 0 & (i \leq k \text{ için}) \end{array}\right\} \{f_{k+1}, \ldots, f_n\} \subseteq W^0$$

2) $\{f_{k+1}, \ldots, f_n\} = T_1$, lineer bağımsızdır:

T^* bazının alt kümesi old. dan lin. bğ.sız.

3) $T_1 = \{f_{k+1}, \ldots, f_n\}$, W° 'ı gerer;

$f \in W^\circ \subseteq V^*$ olsun.

T^* baz old. dan

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i . f_i$$ ve Teorem 6'dan

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(u_i) . f_i = \sum_{i=1}^{k} \cancel{f(u_i)} f_i + \sum_{i=k+1}^{n} f(u_i) f_i$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$= \sum_{i=k+1}^{n} f(u_i) . f_i$$

$f(u_1) = f(u_2) = \ldots = f(u_k) = 0$
$f \in W^\circ$ ve $u_1, \ldots, u_k \in W$

f, $f_{k+1}, \dots, f_n$ nin bir lin. birleşimidir.

W^0, $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ tarafından gerilir.

$T_1 = \{f_{k+1}, \dots, f_n\}$

1) $T_1 \subseteq W^0$

2) T_1 lin. bğ.sız

3) T_1, W^0 ı gerer

T_1, W^0 için bazdır. $\text{boy}\, W^0 = |T_1| = n-k$

$$\underbrace{\text{boy}\, W}_{k} + \text{boy}\, W^0 = \underbrace{\text{boy}\, V}_{n}$$

Sonuç: W, n boyutlu V uzayının k boyutlu bir alt uzayı ise W; $n-k$ hiper uzayın kesişimidir.

İspat: Önceki teoremden: boy $W^0 = n-k$ dır.

W^0 ın bir bazı $\{f_1, f_2, \dots, f_{n-k}\}$ ise

W; $f_1(v) = 0 \rightarrow$ denklem sisteminin çözüm kümesidir:

$$f_1(v) = 0$$
$$f_2(v) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_{n-k}(v) = 0$$

1) Her $v \in W$ için $f_i(v) = 0$.

2) $v \in V$ için $f_1(v) = f_2(v) = \cdots = f_{n-k}(v) = 0$ ise $v \in W$:

$\{f_{k+1}, \ldots, f_n\}$

$\{f_1 \ldots, f_{n-k}, \ldots, f_n\}$

$\{u_1, \ldots, u_n\}$

$v = \sum f_i(u) \cdot u_i$

Böylece W uzayı

$f_1(v) = 0$

$\vdots$

$f_{n-k}(v) = 0$

denklem sisteminin ortak çözüm kümesidir; her bir denklem bir hiper uzay tanımladığından, $n-k$ hiper uzayın kesişimidir.

Önceki ispatın notasyonu ile

$\{u_1, \ldots, u_k\}$ W nun bazı.

$T = \{u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n\}$ V için baz.

$\{f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_n\} = T^*$, T nin duali.

$u \in V$ için $\underline{f_{k+1}(u) = f_{k+2}(u) = \ldots = f_n(u) = 0}$

$$u = \sum_{i=1}^{n} \underset{\downarrow}{c_i} \cdot u_i \overset{T.6}{=} \sum_{i=1}^{n} f_i(u) \cdot u_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} f_i(u) \cdot u_i + \sum_{i=k+1}^{n} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{f_i(u)} \cdot u_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} f_i(u) \cdot u_i \quad \underbrace{\{u_1, \ldots, u_k\}}_{W \text{ nun bazı.}} \text{ nin lin. bil.}$$

Önerme: V bir vektör uzayı S_1 ve S_2 iki alt kümesi olsun. Eğer $S_1 \subseteq S_2$ ise $S_2^0 \subseteq S_1^0$ olur.

İspat: $p \Rightarrow q$

$$S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow \underbrace{S_2^0 \subseteq S_1^0}$$

$$f \in S_2^0 \Rightarrow f \in S_1^0$$

$f \in S_2^0$ olsun. $f(v)=0$ (Her $v \in S_2$ için)

Her $\boxed{z \in S_1} \subseteq S_2$ $z \in S_2$ old. dan. $f(z)=0$.

$\Rightarrow f \in S_1^0 \Rightarrow S_2^0 \subseteq S_1^0$ ✓

Sonuç: W_1 ve W_2, V sonlu boyutlu uzayının alt uzayları ise $W_1 = W_2$ olması için gerek ve yeter $\Longleftrightarrow$ şart $W_1^0 = W_2^0$ olmasıdır.

İspat: $\boxed{W_1 = W_2} \Rightarrow W_1^0 = W_2^0$ gereklilik

$S_1 = W_1 \subseteq W_2 = S_2$ ve $W_2 \subseteq W_1$ dir.

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$W_2^0 \subseteq W_1^0 \wedge W_1^0 \subseteq W_2^0 \Rightarrow W_1^0 = W_2^0$$

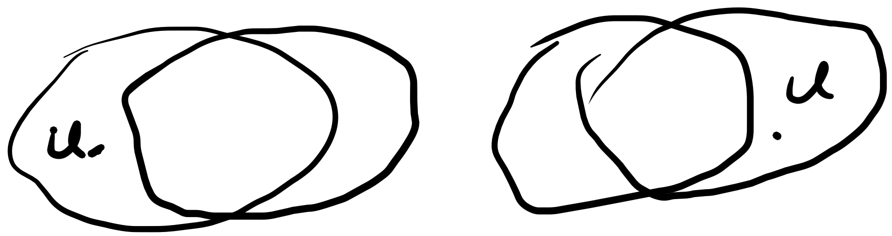
$$\underset{p}{W_1^0 = W_2^0} \Longrightarrow \underset{q}{W_1 = W_2} \text{ yeterlilik}$$

$$(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$$

$W_1 \neq W_2$ ise $W_1^0 \neq W_2^0$:

$W_1 \neq W_2$ ise öyle bir u vardır ki;

$u \in W_1$ ve $u \notin W_2$ ya da $u \in W_2$ ve $u \notin W_1$ olur.



Diyelim ki $u \in W_2$ ve $u \notin W_1$ olsun.

W_1 için bir baz $\{u_1, \dots, u_k\}$ olsun.

$\{u_1, \dots, u_k, u\}$ lineer bağımsızdır.

Bu kümeyi V nin bazı olacak şekilde

$S = \{\underbrace{u_1, u_2, \dots, u_k, u}, u_{k+2}, \dots, u_n\}$

V nin bazı olsun. S in dual bazı

$S^* = \{f_1, \dots, f_k, f, f_{k+2}, \dots, f_n\}$ olsun.

$f \in \underline{W_1^0}$ çünkü $f(u_1) = f(u_2) = \dots = f(u_k) = 0$

?

$f \notin \underline{W_2^0}$ çünkü $f(\underset{\in W_2}{u}) = 1$

$\Rightarrow W_1^0 \neq W_2^0$

1) Homojen denkl. sistemlerine karşılık gelen lineer formları;

$V \quad V \quad V^*$

2) Lineer formların sıfırladıkları ortak uzay.

$V^* \quad V$

① Bir homojen denkl. sistemi verildiğinde: çözüm uzayı,

$$\begin{rmatrix} A_{11}x_1 + \dots + A_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + \dots + A_{mn}x_n = 0 \end{rmatrix}$$

Her bir denklem;

$f_i = A_{i1}x_1 + \dots + A_{in}x_n$

formunun sıfırladığı vektör kümesidir.

(2) $\mathbb{R}^n$ de $\alpha_i = (A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in})$ olmak üzere m vektör verilmiş olsun. α_i lerin gerdiği uzayın sıfırlayanları,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

şeklinde olduğundan; f in yukarıdaki anihilatörde olması için

$$f(\underbrace{A_{i1}, \ldots, A_{in}}_{\alpha_i}) = c_1 . A_{i1} + c_2 . A_{i2} + \ldots + c_n A_{in} = 0$$

olmalıdır. Böylece c leri tanımlayan denkl. sistemi

$\underline{A . C = 0}$ homojen denkl. sistemidir.

Örnek: $\mathbb{R}^4$ te 3 lineer form şu şekilde verilmiş olsun: (Verilen formların ortak ç. kümesi)

$$f_1(x_1,\ldots,x_4) = x_1+2x_2+2x_3+x_4$$

$$f_2(x_1,\ldots,x_4) = 2x_2 + x_4$$

$$f_3(x_1,\ldots,x_4) = -2x_1 - 4x_3 + 3x_4 .$$

Bu formların annihile ettiği uzayı bulunuz.

$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ için $f_1(\vec{x}) = f_2(\vec{x}) = f_3(\vec{x}) = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$x_4=0,\ x_2=0,\ x_1=-2x_3$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C.K = \text{Ger}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Örnek: (verilen vektörleri annihile eden formlar)

$\mathbb{R}^5$ in W alt uzayı;

$u_1 = (2, -2, 3, 4, -1)$

$u_2 = (-1, 1, 2, 5, 2)$

$u_3 = (0, 0, -1, -2, 3)$

$u_4 = (1, -1, 2, 3, 0)$

tarafından gerilen uzay olsun. $W^0 = ?$

$$f \in W^{\circ} \subseteq \mathbb{R}^{5*} \iff f = c_1 \underset{u_{11}}{x_1} + c_2 \underset{u_{12}}{x_2} + \dots + c_5 \underset{u_{15}}{x_5}$$

$$f(u_1) = f(u_2) \dots = f(u_5) = 0$$

$$f(u_1) = 2c_1 - 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 - c_5 = 0$$

$$f(u_2) = -c_1 + c_2 + 2c_3 + 5c_4 + 2c_5 = 0$$

$$f(u_3) = -c_3 - 2c_4 + 3c_5 = 0$$

$$f(u_4) = c_1 - c_2 + 2c_3 + 3c_4 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 14 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \end{array}\right]$$

$c_5 = 0$

$c_3 = -2c_4$

$c_1 = c_2 + 2c_3 + 5c_4$

$$c_1 x_1 + x_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 + c_5 x_5 = f(x)$$

$$= \left(c_2 + 2(-2c_4) + 5 . c_4\right) x_1 + c_2 x_2 + (-2c_4) x_3$$

$$+ c_4 x_4 + 0 \cdot x_5$$

$$= c_2 (x_1 + x_2) + c_4 (x_1 - 2x_3 + x_4)$$

$c_5 = 0$

$c_3 = -2c_4$

$c_1 = c_2 + 2c_3 + 5c_4$

$$x_1 + x_2 = f_1$$

$$x_1 - 2x_3 + x_4 = f_2$$