1. Lineer Dönüşümler, Matris Temsilcileri ve Köşegenleştirme.

2. Lineer, Bilineer, Kuadratik Formlar:

Teorem 1: V sonlu boyutlu bir vektör uzayı $S=\{u_1,\dots,u_n\}$ bir sıralı bazı, W bir vektör uzayı ve $w_1, w_2, \dots, w_n$ W nun vektörleri olsun. Bu durumda her $1\leq i\leq n$ için $T(u_i)=w_i$ olacak şekilde tek bir $T:V\to W$ lineer dönüşümü vardır.

İspat: Bir $u\in V$ verildiğinde $u=a_1u_1+\dots+a_nu_n$ ise

$$T(u)=a_1T(u_1)+\dots+a_nT(u_n)$$
$$=a_1\cdot w_1+\dots+a_nw_n$$

şeklinde tanımlayalım. Tanım gereği her bir $1 \leq j \leq n$ için $T(u_j) = w_j$ olur.

T lineerdir. (Alıştırma)

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

(ii) $T(c.u) = c.T(u)$

T'nin tekliği: Bir $U: V \to W$ lineer dönüşümü için her $1 \leq j \leq n$ için $U(u_j) = w_j$ sağlansın. Bu durumda

$V \ni u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$ için

$$U(u) = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n = T(u)$$

Dolayısıyla $U = T$ dir. T tektir.

Lineer Dönüşümlerin Cebri:

Teorem 2: V ve W birer vektör uzayı olsun. T ve U, V den W ya birer lineer dönüşüm olsun.

1) $(T+U)(u) = T(u) + U(u)$ $\quad u \in V$

şeklinde tanımlanan $T+U$ ve

2) $c \in \mathbb{R}$, $u \in V$ için

$(c.T)(u) = c.(T(u))$

şeklinde tanımlanan $(c.T)$ birer lineer dönüşümdür.

(İspot : Alıştırma)

Yukarıda tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre V 'den W'ya tüm lineer dönüşümler kümesi $L(V,W)$ bir vektör uzayı oluşturur.

Tanım: V vekt. uzayından W vekt. uzayına tanımlı tüm lineer dönüşümler kümesi (uzayı) $L(V,W)$ ile gösterilir.

Teorem 3: V n boyutlu, W m boyutlu birer vektör uzayı ise $L(V,W)$ uzayının boyutu $m.n$ dir.

İspat: $S=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ ve $T=\{w_1,\dots,w_m\}$ V ve W nun birer sıralı bazı olsun. $1\leq p\leq m$ ve $1\leq q\leq n$ olmak üzere V den W ya

$$E^{p,q}(u_i)=\begin{cases}0\,; & i\neq q \text{ için}\\ w_p & i=q \text{ için}\end{cases}$$

$$=\delta_{iq}\cdot w_p$$

$$\delta_{iq}=\begin{cases}1\,, & i=q \text{ için}\\ 0\,, & i\neq q \text{ için}\end{cases} \quad \text{(Kronecker Delta)}$$

lineer dönüşümleri tanımlanmış olsun. Teorem 1 den, $E^{p,q}$ lin. dönüşümleri teklikle tanımlıdır.

iddia: $\{E^{p,q}\}$ kümesi $L(V,W)$ için bir bazdır.

1) $\{E^{p,q}\}$; $L(V,W)$ uzayını gerer:

$M: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun.

Her $1 \leq j \leq n$ için $A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{mj}$ $M(u_j)$ nin T koordinatları olsun.

$$\boxed{M(u_j) = \sum_{p=1}^{m} A_{pj} \cdot w_p}$$

A_{pq}

$$N := \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} A_{pq} \cdot E^{p,q}$$ olsun.

Her bir $1 \leq j \leq n$ $\quad N(\underline{u_j}) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} A_{pq} \underbrace{E^{p,q}(u_j)}_{E^{p,j}(u_j)}$

$$\underset{q=j}{=} \sum_{p=1}^{m} A_{p \cdot j} \cdot (w_p)$$

$$= M(\underline{u_j})$$

N ve M, V nin baz vektörleri üzerinde aynı değeri alır. $\Rightarrow$ $N \equiv M$

$$M_1 = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} (A_{pq}) \cdot E^{p,q} = N$$

$\{E^{p,q}\}$ $L(V, W)$ uzayını gerer.

2) $\{E^{p,q}\}$ lineer bağımsızdır:

$$U = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} \underbrace{A_{pq}}_{0} \underline{\underline{E^{p,q}}} = 0 \quad \text{olsun.}$$

$$U(u_j) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} A_{p,q} \left[E^{p,q}(u_j) \right]$$

$$\underset{q=j}{\Rightarrow} \sum_{p=1}^{m} A_{pj} (\underline{\underline{w_p}}) = 0$$

$\{w_1, \ldots, w_m\}$ W uzayının bazı $\Rightarrow$ lin. bğ.sız.

Her $1 \leq j \leq n$ için $\quad A_{pj} = 0$

$\Rightarrow \{E^{p,q}\}$ lineer bağımsızdır.

Sonuç: $\{E^{pq}\}$ kümesi $L(V,W)$ için bir bazdır. $\text{boy}\, L(V,W) = m.n$. ∎

Teorem 4: V, W ve Z birer vektör uzayı, $T: V \Rightarrow W$ ve $U: W \Rightarrow Z$ birer lineer dönüşüm olsun. Bu durumda $(U \circ T)$ bileşke fonksiyonu

$$(U \circ T)(u) = U(T(u))$$

V'den Z'ye bir lineer dönüşümdür.

İspat: 1) $v_1, v_2 \in V$ alalım.

$$\begin{aligned}(U \circ T)(v_1+v_2) &= U(T(v_1+v_2)) \\ &= U(\underbrace{T(v_1)} + \underbrace{T(v_2)}) \\ &= U(T(v_1)) + U(T(v_2)) \\ &= (U \circ T)(v_1) + (U \circ T)(v_2) \quad \checkmark\end{aligned}$$

(2) $c \in \mathbb{R}$, $u \in V$ olsun.

$$(U \circ T).(c.u) = U(T(cu))$$
$$= U(c.T(u))$$
$$= c.U(T(u))$$
$$= c.(U \circ T(u))$$

$\Rightarrow$ $U \circ T : V \to Z$ bir lineer dönüşümdür.

Lemma: V bir vektör uzayı; U, T_1 ve T_2 V üzerinde birer lineer operatör olsun.

(i) $U \circ (T_1 + T_2) = U \circ T_1 + U \circ T_2$

$(T_1 + T_2) \circ U = T_1 \circ U + T_2 \circ U$

(ii) $c \in \mathbb{R}$ için $c.(U \circ T_1) = (cU) \circ T_1 = U \circ (cT_1)$

İspat:

(i) $$[U \circ (T_1 + T_2)](u) = U\big((T_1 + T_2)(u)\big)$$
$$= U\big(\underbrace{T_1(u)} + \underbrace{T_2(u)}\big)$$
$$= U(T_1(u)) + U(T_2(u))$$
$$= (U \circ T_1)(u) + (U \circ T_2)(u)$$
$$= (U \circ T_1 + U \circ T_2)(u)$$
$$=$$

(ii) $c.(U \circ T_1)(u) = c.(U(T_1(u)))$

$= (cU)(T_1(u)) = \underline{(cU \circ T_1)}$

$= c.(U(T_1(u)))$

$= U(c.T_1(u))$

$= \underline{(U \circ cT_1)(u)}$

$$\boxed{\begin{aligned} &c.L(x) \\ &= L(cx) \end{aligned}}$$

Örnek: A $m \times n$ tipinde; B $p \times m$ tipinde

birer matris olsun. A ile

$$T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto A \cdot x$$

ve B ile

$$U_B : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

lin. dönüşümleri tanımlansın. $(U_B \circ T_A)$

lineer dönüşümü;

$$(U_B \circ T_A)(x) = U_B(T_A(x))$$
$$= U_B(A \cdot x)$$
$$= B \cdot A \cdot x$$ değerini alır.

Lineer Formlar (Lineer Fonksiyoneller)

Tanım: V bir vektör uzayı olmak üzere tüm $L : V \to \mathbb{R}$ lineer dönüşümlerine birer lineer form (lin. fonksiyonel) denir.

Örnek: $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ verilmiş olsun.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir lineer form olur.

$\mathbb{R}^n$ in standart bazı ve $\mathbb{R}$ nin bazı $\{1\} = T$ göre f in temsilcisi :

$$A = \left[[f(e_1)]_T \,\vdots\, [f(e_2)]_T \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, [f(e_n)]_T \right]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}$$ olur.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde her lineer form da bu şekildedir.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir lineer form olsun.

$\mathbb{R}^n$ in standart bazı ve $\mathbb{R}$ nin bazı $T=\{1\}$ e göre f in temsilcisi

$$A = [f(e_1) \quad f(e_2) \; \dots \; f(e_n)] \; ; \quad f(e_j) = a_j$$

ve $$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$ buluruz.

Örnek: $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\pi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$$

(izdüşüm) fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir lineer formdur.

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

$\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$

i) $\pi_i(\vec{x} + \vec{y}) = x_i + y_i$

$$= \pi_i(\vec{x}) + \pi_i(\vec{y})$$

ii) $\pi_i(c.\vec{x}) = c.x_i$

$$= c.\pi_i(\vec{x})$$

Örnek: P polinomlar uzayı üzerinde

$$J : P \to \mathbb{R}$$
$$p(t) \mapsto \int_0^1 p(t)\,dt$$

bir lineer formdur:

i) $J(p+q) = \int_0^1 \big(p(t) + q(t)\big)\,dt$

$$= \int_0^1 p + \int_0^1 q = J(p) + J(q)$$

ii) $J(c.p(t)) = \int_0^1 c.p(t).dt = c \int_0^1 p(t)\,dt$

$$= c.J(p)$$

Örnek: $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ için

$$İz : V \to \mathbb{R}$$
$$A \mapsto (A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}) = İz(A)$$

bir lineer formdur.

i) $$İz(A+B) = (A_{11}+B_{11}) + (A_{22}+B_{22}) + \dots + (A_{nn}+B_{nn})$$
$$= (A_{11} + \dots + A_{nn}) + (B_{11} + \dots + B_{nn})$$
$$= İz(A) + İz(B)$$

ii) $$İz(c.A) = c.A_{11} + \dots + c.A_{nn}$$
$$= c.\, İz(A)$$

Örnek: $L: P \to \mathbb{R}$, verilen bir t_0 için

$$L(p(t)) = p(t_0)$$

ile tanımlanan L, P üzerinde bir lin. formdur.

i) $p(t), q(t) \in P$ alalım.

$$L(p+q) = (p+q)(t_0)$$

$$= p(t_0) + q(t_0) = L(p) + L(q)$$

ii) $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$L(c.p(t)) = c.p(t_0) = c.L(p)$$

$L(V, \mathbb{R})$ bir vektör uzaydır. ($L(V, W)$)
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $W = \mathbb{R}$

(Teorem 2)

$$\text{boy}\, L(V, \mathbb{R}) = \text{boy}(V) \cdot \overbrace{\text{boy}(\mathbb{R})}^{1} \quad (\text{Teorem } 3)$$

$$\boxed{\text{boy}(L(V, \mathbb{R})) = \text{boy}\, V.}$$

$L(V, \mathbb{R})$ uzayı V^* ile gösterilir.